

DOI: 10.7652/xjtuxb201401017

外部动态激励作用下齿轮系统非线性动力学特性

李应刚^{1,2}, 陈天宁^{1,2}, 王小鹏^{1,2}, 于坤鹏^{1,2}, 周汉^{1,2}, 张哲^{1,2}
(1. 西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安;
2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了研究外部动态激励作用下齿轮系统非线性动力学特性,建立了考虑周期时变刚度、齿侧间隙、黏弹性阻尼和外部动态激励的单自由度直齿轮副系统动力学模型。针对外部动态激励作用下的周期时变刚度、齿侧间隙、激励幅值和阻尼比对齿轮副系统动力学特性的影响,采用增量谐波平衡法来求解齿轮副系统的稳态周期响应,并采用四阶变步长 Runge-Kutta 数值方法进行了验证。研究表明,增量谐波平衡法求解结果与数值仿真结果吻合得较好,齿轮系统在外部动态激励作用下会引起参数共振、多值解和幅值跳跃等非线性动力学行为,增大激励幅值和阻尼比等参数,能够有效控制齿轮系统的非线性振动响应。

关键词: 齿轮系统;外部动态激励;增量谐波平衡法;非线性动力学

中图分类号: O121.8;G558 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)01-0101-05

Non-Linear Dynamics of Spur Gear Pair under External Periodic Excitation

LI Yinggang^{1,2}, CHEN Tianning^{1,2}, WANG Xiaopeng^{1,2}, YU Kunpeng^{1,2}, ZHOU Han^{1,2},
ZHANG Zhe^{1,2}
(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structural, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Under external periodic excitation, the dynamic model of a single-degree-of-freedom spur gear pair with periodic time-varying stiffness, backlash and viscous damping is established. The incremental harmonic balance method (IHBM) is applied to analyze the dynamic responses of the gear pair system. A comparison with Runge-Kutta integration results shows the accuracy and authority of IHBM. The effects of the periodic time-varying stiffness, backlash, excitation amplitude and viscous damping ratio on the dynamic characteristics of gear pair system are investigated. It indicates that the time-varying factors and backlash under periodic excitation usually lead to parametric resonance, multi-valued properties and amplitude jump phenomena. The enhanced excitation amplitude and the damping ratio facilitate controlling the nonlinear vibration.

Keywords: gear pair; external periodic excitation; incremental harmonic balance method; nonlinear dynamics

励作用下具有齿侧间隙的齿轮副系统的非线性动力学频响特性^[3-4]。Padmanabhan 等人采用参数延展技术和谐波平衡法,研究了具有参数激励和外激励共同作用的非线性振动系统的动态响应^[5]。1997年,Kahraman 等人对具有时变啮合刚度、齿侧间隙和外部激励的齿轮系统进行了实验研究,发现齿轮系统振动响应中存在大量的非线性现象^[6]。文献[7-9]采用数值方法研究了内部动态激励作用下齿轮时变间隙非线性系统的分岔与混沌特性,但这些都是针对内部动态激励和外部名义载荷作用下齿轮副系统非线性动力学特性进行的研究,而忽略了外部动态激励的影响。Comparin 等人利用数值分析方法和谐波平衡法,研究了外部动态激励作用下冲击副的非线性动力学特性,并在冲击副模型中忽略了时变刚度的影响^[10]。张锁怀用 A 算符方法对扭矩激励作用下齿轮时变系统的动态特性进行求解^[11],模型中忽略了间隙非线性特性。Theodossiadis 等人采用分段多尺度法研究了外部动态激励作用下齿轮副非线性时变系统的稳态周期响应^[12],但分段多尺度法求解却丢失了系统的亚谐波响应及超谐波响应。

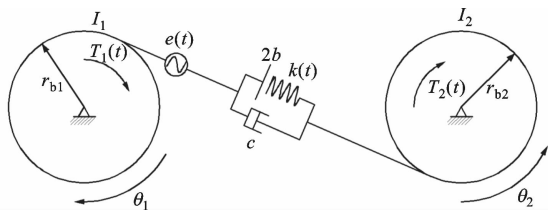
对于具有时变刚度和分段非线性系统,利用增量谐波平衡法(IHBM)可以求得任意阶的近似解。Lau 提出了增量谐波平衡法,对分段线性机械系统的动态特性进行了研究^[13],使增量谐波平衡法被广泛应用于求解各类非线性动力学的问题^[14-16]。本文采用增量谐波平衡法,对外部动态激励作用下齿轮副时变间隙非线性系统的动力学特性进行了研究,建立了齿轮副系统扭转振动模型。模型考虑了周期时变刚度、齿侧间隙、黏弹性阻尼以及外部动态激励等因素,利用增量谐波平衡法,给出了齿轮非线性时变系统的一般解形式,采用四阶变步长数值方法(Runge-Kutta)进行了验证,并根据增量谐波平衡法研究了系统参数对齿轮系统非线性动态特性的影响。

1 非线性动力学模型

如图1所示,模型中考虑了时变啮合刚度、齿侧间隙、黏弹性阻尼及外部动态激励等因素,忽略传动轴的横向和轴向弹性变形,以及支持系统的弹性变形。齿轮副扭转振动系统的运动微分方程为

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + c r_{b1} [\dot{r}_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(t)] + r_{b1} k(t) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t)) = T_1(t) \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 - c r_{b2} [\dot{r}_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(t)] - r_{b2} k(t) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t)) = -T_2(t) \quad (2)$$



θ_1, θ_2 : 主、被动齿轮的扭转振动位移; I_1, I_2 : 主、被动齿轮的转动惯量; r_{b1}, r_{b2} : 主、被动齿轮的基圆半径; c : 齿轮系统黏性阻尼; $k(t)$: 时变啮合刚度; $e(t)$: 齿轮系统静传递误差; $T_1(t), T_2(t)$: 作用在主、被动齿轮上的外载荷力矩; b : 齿侧间隙半宽

图1 齿轮副系统的非线性动力学模型

$$T_1(t) = T_{1m} + T_{1a}(t); \quad T_2(t) = T_{2m} + T_{2a}(t) \quad (3)$$

式中: T_{1m} 为作用在主动齿轮上的外部名义力矩; $T_{1a}(t)$ 为作用在主动齿轮上的外部动态力矩; T_{2m} 为作用在从动齿轮上的外部名义力矩; $T_{2a}(t)$ 为作用在从动齿轮上的外部动态力矩。如果忽略负载扭矩波动和静传递误差的作用,式(1)、(2)可简化为

$$m_e \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k(t) f(u(t)) = F_{mT} + F_{aT}(t) \quad (4)$$

$$u(t) = r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t) \quad (5)$$

$$m_e = \frac{I_1 I_2}{I_1 r_{b2}^2 + I_2 r_{b1}^2} \quad (6)$$

$$F_m = \frac{T_{1m}}{r_{b1}} = \frac{T_{2m}}{r_{b2}}; \quad F_a(t) = \frac{T_{1a}(t)}{r_{b1}} \quad (7)$$

$$f(u(t)) = \begin{cases} u(t) - b, & u(t) > b \\ 0, & -b \leq u(t) \leq b \\ u(t) + b, & u(t) < -b \end{cases} \quad (8)$$

将时变啮合刚度进行 Fourier 展开至 L 阶,则有

$$k(t) = k_m \left[1 + 2 \sum_{l=1}^L \epsilon_l \cos(l\omega t) \right] \quad (9)$$

式中: $u(t)$ 为齿轮系统的振动位移; L 为阶数; m_e 为等效质量; F_{mT} 为传递名义载荷; F_{aT} 为动态激励; $f(u)$ 为间隙非线性函数; k_m 为平均刚度; ω 为啮合频率; ϵ_l 为反映刚度变化的参数。对式(4)进行归一化处理,得到

$$x = \frac{u}{b}; \quad \omega_n = \left(\frac{k_m}{m_e} \right)^{1/2}; \quad \bar{t} = \omega_n t;$$

$$\xi = \frac{c}{2m_e \omega_n}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}; \quad F_m = \frac{F_{mT}}{m_e b \omega_n^2};$$

$$F_a(\bar{t}) = \frac{F_{aT}(\bar{t})}{m_e b \omega_n^2} = F_a \cos \Omega \bar{t}$$

式中: x 为归一化的振动位移; ω_n 为固有频率; $\bar{t}$ 为归一化时间; ξ 为阻尼比; Ω 为归一化啮合频率。由此,式(4)可改写为

$$\ddot{x}(\bar{t}) + 2\xi\dot{x}(\bar{t}) + (1 + 2\sum_{l=1}^L \epsilon_l \cos(l\Omega\bar{t}))f(x) = F_m + F_a \cos\Omega\bar{t} \quad (10)$$

$$f(x(\bar{t})) = \begin{cases} x(\bar{t}) - 1, & x(\bar{t}) > 1 \\ 0, & -1 \leq x(\bar{t}) \leq 1 \\ x(\bar{t}) + 1, & x(\bar{t}) < -1 \end{cases} \quad (11)$$

2 增量谐波平衡法求解

利用时间尺度 $\tau = \Omega\bar{t}$, 将式(10)改写为

$$\Omega^2 \ddot{x}(\tau) + 2\xi\Omega \dot{x}(\tau) + (1 + 2\sum_{l=1}^L \epsilon_l \cos(l\tau))f(x) = F_m + F_a \cos\tau \quad (12)$$

利用 Newton-Raphson 算法求解式(12)表示的分段线性差分系统,得到微分方程的解为

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \Delta x(\tau) \quad (13)$$

其中 $x_0(\tau)$ 为式(12)的近似解, $\Delta x(\tau)$ 为增量方程。设式(12)的 N 阶近似解为

$$x_0(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \quad (14)$$

式中: a_0 为基波幅值; a_n, b_n 为高次谐波幅值。增量方程为

$$\Delta x(\tau) = \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N (\Delta a_n \cos n\tau + \Delta b_n \sin n\tau) \quad (15)$$

将式(13)代入式(12)中进行泰勒级数展开,并略去高阶项得到

$$\Omega^2 \frac{d^2 \Delta x}{d\tau^2} + 2\xi\Omega \frac{d\Delta x}{d\tau} + (1 + 2\sum_{l=1}^L \epsilon_l \cos(l\tau))f'(x_0) \cdot \Delta x = F_m + F_a \cos\tau - \left[\Omega^2 \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + 2\xi\Omega \frac{dx_0}{d\tau} + (1 + 2\sum_{l=1}^L \epsilon_l \cos(l\tau))f(x_0) \right] \quad (16)$$

令

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, b_1, b_2, b_3, \dots, b_N]^T$$
$$\Delta \mathbf{a} = [\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots, \Delta a_N, \Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3, \dots, \Delta b_N]^T$$

利用 Galerkin 过程,将式(16)方程左右两端同时乘以 $\cos(i\tau), \sin(i\tau) (i=0, 1, 2, 3, \dots, N)$, 并在 $0 \sim 2\pi$ 之间积分,得到关于 $\Delta \mathbf{a}$ 的 $2N+1$ 阶线性方程组

$$\mathbf{C}\Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{C} = 2N+1 \quad (17)$$

式中: $\mathbf{C}$ 为 $2N+1$ 阶矩阵; $\mathbf{R}$ 为 $2N+1$ 阶列向量。式(17)即为应用增量谐波平衡法推导出的以 $\Delta \mathbf{a}$ 为未知量的非线性系统振动稳态周期响应的迭代计算公式。

3 齿轮系统非线性动态特性

系统参数^[4,12]取 $L=3, N=11, \zeta=0.024, F_m=0.25, F_a=0.075, \epsilon_1=0.03, \epsilon_2=0.02, \epsilon_3=0.01$ 。应用增量谐波平衡法得到齿轮系统的频响特性曲线,采用四阶变步长 Runge-Kutta 法进行数值仿真验证(见图 2),增量谐波平衡法的求解结果与数值仿真结果吻合得较好。在外部动态激励作用下,齿轮系统频响曲线不仅出现主共振,同时得到了超谐波响应(见图 3),并且频响曲线存在多值解和跳跃非线性的特性。由图 4 可知,多值解和跳跃现象对应齿轮副系统的无冲击状态、单边冲击和双边冲击状态。

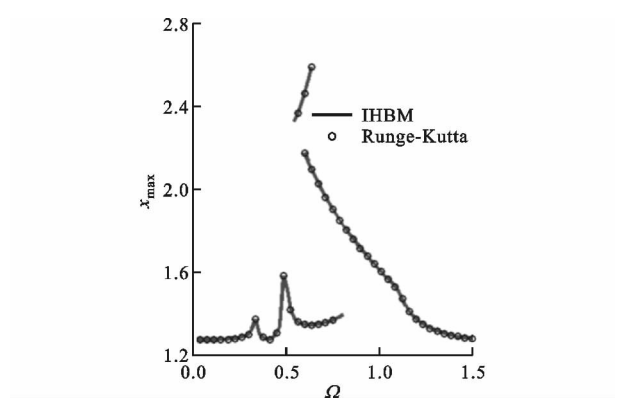


图 2 齿轮副系统的频响特性曲线

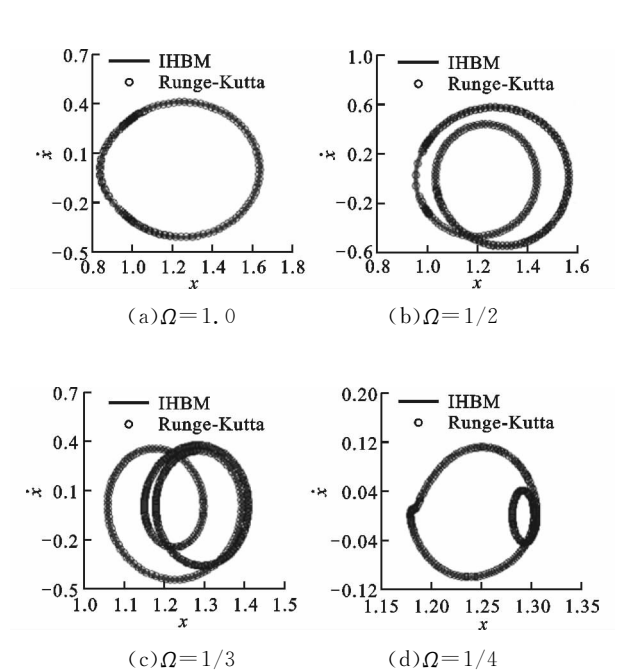
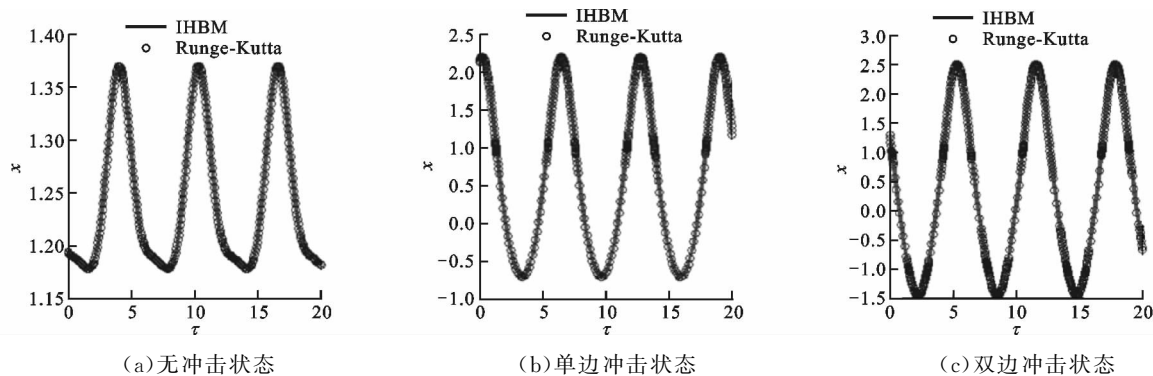


图 3 齿轮副系统的超谐波响应

4 参数分析

由齿轮副系统非线性动力学模型可知,在外部

图4 $\Omega=0.6$ 时齿轮副系统的稳态响应

动态激励作用下, 齿轮系统的非线性振动响应的影响因素主要有周期时变刚度、齿侧间隙、激励幅值和阻尼比等。

4.1 时变刚度和间隙的影响

线性时变模型、非线性时不变模型及非线性时变模型的动态特性如图5所示。由非线性时不变模型与非线性时变模型的对比可知, 时变刚度的存在使齿轮系统归结为参数振动范畴, 引起系统参数共振。对比线性时变模型与非线性时变模型可知, 间隙非线性的存在导致齿轮副系统出现多值解和幅值跳跃等非线性动力学特性。

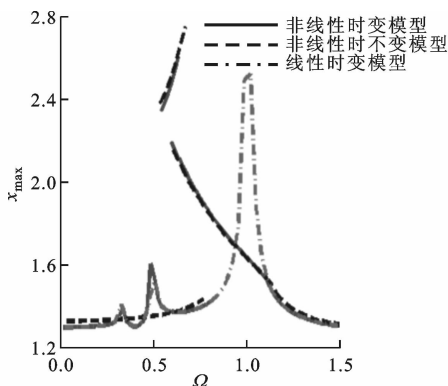


图5 时变刚度与间隙对齿轮系统振动响应的影响

4.2 激励幅值的影响

如图6所示, 对3种不同激励幅值条件下的系统频响特性曲线进行了对比分析。随着激励幅值的增大, 齿轮副系统非线性动态特性如多值解及跳跃现象逐渐消失, 齿轮系统在重载荷工况时, 表现为线性振动特性。因此, 增大激励幅值能够有效控制齿轮系统的非线性动态响应。

4.3 阻尼比的影响

在3种不同阻尼比条件下, 对系统频响特性曲线进行了对比分析(见图7)。通过分析计算^[17-18], 一般取 ξ 为0.02~0.17, 随着 ξ 的增大, 齿轮副系统

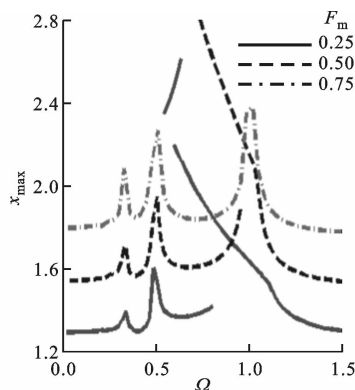


图6 激励幅值对齿轮系统振动响应的影响

的振动幅值明显降低, 齿轮副系统非线性动态特性如多值解及跳跃现象逐渐消失。因此, 增大系统 ξ 能够有效控制齿轮系统的非线性动态响应。

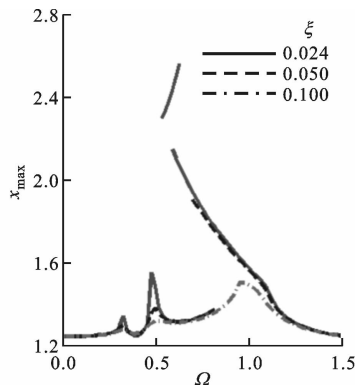


图7 阻尼比对齿轮系统振动响应的影响

5 结论

(1) 本文根据增量谐波平衡法, 研究了齿轮间隙非线性时变系统在外部动态激励作用下的非线性动力学特性, 其求解结果与数值仿真结果吻合得较好。在外部动态激励作用下, 齿轮副系统的频响曲线存在着多值解和跳跃非线性特性, 并对应于齿轮副系

统的无冲击状态、单边冲击状态和双边冲击状态。齿轮系统频响曲线不仅出现主共振,而且得到了超谐波响应。

(2)本文针对周期时变刚度、齿侧间隙、激励幅值和阻尼比对齿轮副系统动力学特性的影响进行了研究。研究表明,周期时变刚度的存在会引起参数共振,齿侧间隙的存在则导致齿轮副系统出现多值解和幅值跳跃等非线性动力学行为,而增大激励幅值和阻尼比能够有效地控制系统的非线性振动响应。

参考文献:

- [1] NEVZAT-ÖZGUVEN H, HOUSER D R. Mathematical models used in gear dynamics-a review [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 121(3): 383-411.
- [2] WANG Jianjun, LI Runfang, PENG Xianghe. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, 56(3): 309-329.
- [3] KAHRAMAN A, SINGH R. Non-linear dynamics of a spur gear pair [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49-75.
- [4] KAHRAMAN A, BLANKENSHIP G W. Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 194(3): 317-336.
- [5] KAHRAMAN A, BLANKENSHIP G W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64(1): 217-226.
- [6] PADMANABHAN C, SINGH R. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 184(1): 35-58.
- [7] 王立华, 李润方, 林腾蛟. 齿轮系统时变刚度和间隙非线性振动特性研究 [J]. *中国机械工程*, 2003, 14(13): 1143-1146.
WANG Lihua, LI Runfang, LIN Tengjiao. Research on nonlinear vibration characteristics due to time-varying mesh stiffness and gear backlash in gear system [J]. *China Mechanical Engineering*, 2003, 14(13): 1143-1146.
- [8] 王晓笋, 巫世晶, 周旭辉. 含侧隙非线性齿轮传动系统的分岔与混沌分析 [J]. *振动与冲击*, 2008, 27(1): 53-56.
WANG Xiaosun, WU Shijing, ZHOU Xuhui. Bifurcation and chaos in nonlinear dynamic model of spur gear

with backlash [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(1): 53-56.

- [9] CHEN Siyu, TANG Jinyuan, LUO Caiwang. Nonlinear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, 46(4): 466-478.
- [10] COMPARIN R J, SINGH R. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 134(2): 259-290.
- [11] 张锁怀, 沈允文, 董海军. 齿轮时变系统对扭矩激励的响应 [J]. *航空动力学报*, 2003, 18(6): 737-743.
ZHANG Suohuai, SHEN Yunwen, DONG Haijun. Response of a gear system with time-varying mesh stiffness to torque fluctuation [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2003, 18(6): 737-743.
- [12] THEODOSSIADES S, NATSIAVAS S. Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(2): 287-310.
- [13] LAU S L, ZHANG W S. Nonlinear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59(1): 153-160.
- [14] 白鸿柏, 黄协清. 三次非线性粘性阻尼双线性滞迟振动系统 IHB 分析方法 [J]. *西安交通大学学报*, 1998, 32(10): 35-38.
BAI Hongba, HUANG Xieqing. Response of forced vibration of bilinear hysteretic oscillator [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 1998, 32(10): 35-38.
- [15] XU L, LU M W, CAO Q. Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 264(4): 873-882.
- [16] SHEN Yongjun, YANG Shaopu, LIU Xiandong. Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(11): 125.
- [17] KASUBA R, EVANS J W. An extended model for determining dynamic loads in spur gearing [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1981, 103: 398.
- [18] WANG K L, CHENG H S. A numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears; part I analysis [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1981, 103: 177.

(编辑 管咏梅)